

نام: .....  
 نام خانوادگی: .....  
 کلاس: سوم تجربی  
 تاریخ امتحان: ۱۶، ۱۰، ۹۱  
 موضوع امتحان: ریاضی ۳  
 نمره دبیر: **قدیانلو**  
 وقت: ۱۲ دقیقه

۱. الف) از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره سبز و ۳ مهره آبی و ۲ مهره زرد می‌باشد سه مهره بی‌تفاوت خارج می‌کنیم. احتمال آن که حداقل یکی مهره آبی باشد را به دست آورید.

در سه غیر آبی نباشد

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = 1 - \frac{10}{120} = \frac{110}{120} = \frac{11}{12}$$

ب) تاسی را سه بار می‌اندازیم. مطلوب نسبت احتمال آن که هر سه عدد نوشته متمایز باشند (هیچ دو عددی مثل هم نباشند)

تاس دوم تاس اول  
 تاس سوم

$$P(A) = \frac{6 \times 5 \times 4}{6^3} = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$$

ج) مقدار احتمال دارد در یک خانواده ۶ نفره: اولاً همه در ماه دی متولد شده باشند ثانیاً هیچ دو نفری در یک ماه متولد نشده باشند.

اولاً

$$\frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{(12)^6}$$

ثانیاً

$$\frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} \times \frac{8}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{P(12, 6)}{(12)^6}$$

د) احتمال آن که احمد در امتحان رانندگی قبول نشود ۱/۶ و احتمال آن که علی در امتحان قبول نشود ۳/۱۰ است. مقدار احتمال دارد حداقل یکی از آن دو در کنکور قبول شود؟

$P(A) = 1/6 \Rightarrow P(A') = 5/6$   
 $P(B) = 3/10 \Rightarrow P(B') = 7/10$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{6} \times \frac{3}{10}\right) = \frac{11}{10} - \frac{1}{20} = \frac{21}{20}$$

۵. در یک آزمون چهار گزینه‌ای با ۵ سوال، احتمال آن که کسی پاسخ‌ها را شانسی گزینش می‌کند و حداقل یک سوال را پاسخ صحیح بدهد را به دست آورید به طوری که حتماً به تک تک سوالات جواب داده شود.

$$\binom{5}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{5}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{15}{4^5} + \frac{1}{4^5} = \frac{16}{4^5} = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256}$$

و جدول زیر جدولی توزیع پریشان و دران پریشان و دران پریشان می دهد. احتمال آن که فردی را به تصادف به عنوان نماینده از این مجموعه انتخاب کنیم یا دران پریشان باشد یا متخصص را به دست آورید

	متخصص	عمومی
پزشک	۲۰	۴۰
دندان پزشک	۱۰	۳۰

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{40}{100} + \frac{30}{100} - \frac{10}{100} = \frac{60}{100} = 0.6$$

۱

۱۵) تاسی را دوبار می بینیم و پیشاهادهای A و B و C را تعریف می کنیم اول پیشاهادهای A، B و C را تعریف می کنیم. احتمال هر یک را به دست آورید. مثلاً با ذکر دلیل بنویسید کدام دو پیشاهمد نسبت به هم مستقل و کدام دو پیشاهمد نسبت به هم نامسازگارند؟

A = { (۶,۴) و (۴,۶) و (۵,۵) }  $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$  (۰.۰۸۳)

B = { (۶,۱) و (۱,۶) و (۶,۲) و (۲,۶) و (۶,۳) و (۳,۶) و (۶,۴) و (۴,۶) و (۶,۵) و (۵,۶) }  $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$  (۰.۱۶۷)

C = { (۵,۱) و (۱,۵) و (۴,۲) و (۲,۴) و (۳,۳) و (۳,۳) و (۶,۶) }  $P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$  (۰.۱۶۷)

$A \cap B = \{ (۶,۴) \} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{36} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{72}$

$A \cap C = \{ \} \Rightarrow$  A و C نامسازگارند (۰.۰)

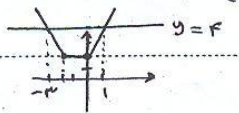
$B \cap C = \{ (۶,۶) \} \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{1}{36} = P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$  (۰.۰۲۷)

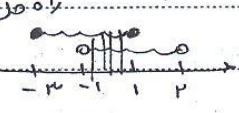
B و C مستقلند (۰.۱۲۵)

۱۱۵

۴) اگر  $A = \{ x | x \in \mathbb{R}, \frac{|3x-1|}{3} < 1 \}$  و  $B = \{ x | x \in \mathbb{R}, |x+1| + |x+2| < 4 \}$  باشد، مطلوب است  $A \cap B$

$A \Rightarrow |3x-1| < 3 \Rightarrow -3 < 3x-1 < 3 \Rightarrow A = (-1, 2)$  (۰.۱۲۵)

$B \Rightarrow |x+1| + |x+2| < 4$    $B = [-3, 1]$  (۰.۱۲۵)

$A \cap B \Rightarrow$    $A \cap B = (-1, 1)$  (۰.۱۲۵)

۱



قديانلو

الف)  $(x^r - 1 + \frac{1}{x^r})(\frac{x^r}{x} + 1) = 2$

$x + \frac{1}{x} = k$

(120)

$(k^r - 1)(k) = 2 \quad k^r - k - 2 = 0 \Rightarrow (k+1)(k^r - k - 2) = 0$

$S = \{1\}$

(120)

$x + \frac{1}{x} = -1$

$x + \frac{1}{x} = 2 \rightarrow x = 1$

(120)

ب)  $\sqrt{x} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2-x} + \sqrt{x-5}$

$D = \{2\}$

(120)

$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

$x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$

$S = \{2\}$

(120)

(120)

ج)  $|x^r + x - 1| < |x^r + 1| + |x - 2| \quad |x| + |y| \geq |x + y|$

$(x^r + 1)(x - 2) < 0$

(120)

$x^r + \frac{-1}{x} + \frac{2}{x} > 0$

$S = (-\infty, 2)$

(120)

(120)

د)  $\frac{x^r - 9x + 12}{x + 2} > 1$

$x^r - 9x + 12 > x + 2$

$x^r - 10x + 10 > 0$

$x^r - 9x + 12 - x - 2 > 0$

$x^r - 10x + 10 > 0$

$x^r - 9x + 12 > x + 2$

$x$	$-2$	$2$	$\Delta$
$x^r - 9x + 12$	$+$	$+$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$
$P >$	$-$	$+$	$+$

$S = (-2, 2) \cup [\Delta, +\infty)$

(120)

(120)

(120)

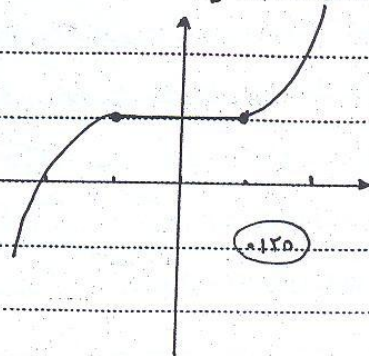
هـ)  $f(x) = \begin{cases} -x^r & x < 1 \\ -2x + 1 & x > 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -2x & x < -1 \\ x^r + 1 & x > -1 \end{cases}$

$f+g = \begin{cases} -x^r - 2x & x < -1 \\ 1 & -1 < x < 1 \\ (x-1)^r + 1 & x > 1 \end{cases}$

(120)

(120)

(120)



(120)

(120)



تدیانلو

الف) اگر  $\tan \alpha = \frac{r}{\delta}$  و  $\alpha$  در ربع اول باشد و  $\sin \alpha = \frac{r}{\delta}$  و  $\cos \alpha = \frac{\delta}{\delta}$  (الف) ۵

$A = \sqrt{r} \cdot \cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$   
 $A = \sqrt{r} (\cos \alpha \cos \frac{\pi}{2} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{2})$  ۱۲۵  
 $= \sqrt{r} (\frac{r}{\delta} \times \frac{\sqrt{r}}{r} - \frac{r}{\delta} \times \frac{\sqrt{r}}{r}) = \frac{r}{\delta} - \frac{r}{\delta} = 0$  ۱۲۵  
 $\cos \alpha = \frac{\delta}{\delta}$  ۱۲۵  
 $\sin \alpha = \frac{r}{\delta}$  ۱۲۵

ب) درستی تساوی مقابله کنید:  
 $\sin 50^\circ + \sqrt{3} \cos 50^\circ = 2 \cos 20^\circ$   
 $\sqrt{3} (\frac{1}{\sqrt{3}} \sin 50^\circ + \cos 50^\circ) = 2 \cos 20^\circ$  ۱۲۵  
 $\sqrt{3} (\sin 50^\circ \cos 30^\circ + \cos 50^\circ \sin 30^\circ) = 2 \cos 20^\circ$  ۱۲۵  
 $\sqrt{3} \cos(50^\circ - 30^\circ) = 2 \cos 20^\circ$  ۱۲۵

ج) اگر  $\tan \alpha$  و  $\tan \beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - x - 2 = 0$  باشد و  $\alpha, \beta$  در ربع اول باشد،  $\cot(\alpha + \beta)$  را بیابید.  
 $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 1$  و  $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -2$   
 $\tan \alpha + \tan \beta = 1$  ۱۲۵  
 $\cot(\alpha + \beta) = \frac{1 - \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} = \frac{1 - (-2)}{1} = 3$  ۱۲۵  
 $\cot(\alpha + \beta) = 3$  ۱۲۵

د) مقدار زیر را بیابید:  $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$  و  $\alpha$  در ربع اول باشد،  $\cos 2\alpha$  را بیابید.  
 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{3}$   
 $(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \frac{2}{3}$   
 $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{2}{3}$  ۱۲۵  
 $\cos 2\alpha = \frac{2}{3}$  ۱۲۵  
 $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$  ۱۲۵  
 $S = \{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}$  ۱۲۵

۶) اگر  $P(x) = ax^2 + bx + c$  یک دایره را در ربع اول قطع کند و در ربع دوم قطع نکند،  $a, b, c$  را بیابید.  
 فرض کنید دایره  $x^2 + y^2 = 1$  است.  
 $A|_2 \Rightarrow -2 = a(2)^2 + b(2) + c$  ۱۲۵  
 $B|_2 \Rightarrow 0 = a(2)^2 + b(2) + c$  ۱۲۵  
 $C|_{-1} \Rightarrow 0 = a(-1)^2 + b(-1) + c$  ۱۲۵  
 $\begin{cases} 4a + 2b + c = -2 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ 2a + b = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -2 \end{cases}$  ۱۲۵



تدیانکو

الف)  $f(x) = \frac{\sqrt{x-2^x}}{|x|-1}$

دامنه تعریف تابع را بیابید و رسم کنید. (۱۷۵)

$2^x > 0 \Rightarrow x > 2^x \Rightarrow -1 < x < 1$

$|x|-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$   
 $D_f = [-1, 1] - \{\pm 1\}$

(۱۷۵)

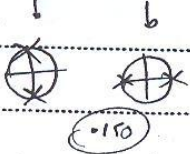
ب)  $g(x) = \log\left(\frac{x}{x^2}\right)$

$\begin{cases} \frac{x}{x^2} > 0 \rightarrow x > 0 \\ \frac{x}{x^2} \neq 1 \rightarrow x \neq 2 \end{cases}$

$D_g = (0, 2) \cup (2, +\infty)$

(۱۷۵)

ج)  $h(x) = \tan x \cdot \cot x$



$D_h = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$

(۱۷۵)

الف) اگر  $f(x) = \sqrt{x+2}$  و  $g(x) = \sqrt{x-2}$  باشد، دامنه  $f \circ g$  را بیابید و رسم کنید. (۱۷۵)

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$   
 $D_g: x \geq 2$   
 $D_f: 2 \geq x$

$\Rightarrow x \geq -2$   
 $\Rightarrow x < 2$

$g(x) < 2$   
 $\sqrt{x+2} < 2$   
 $x+2 < 4$   
 $x < 2$   
 $D_{f \circ g} = [2, 2]$

(۱۷۵)

ب) اگر  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  و  $g(f(x)) = (x - \frac{1}{x})^2$  باشد، دامنه  $f \circ g$  را بیابید و رسم کنید. (۱۷۵)

$g\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x + \frac{1}{x}}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}\right)^2$

$g(k) = k^2 - k$

$f \circ g = f(g(x)) = g(x) + \frac{1}{g(x)} = (x^2 - 1) + \frac{1}{x^2 - 1}$

(۱۷۵)

تدیانکو

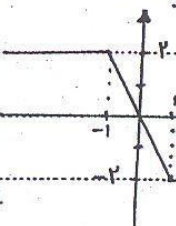
۱.  $f(x) = x + \sqrt{x}$  و  $g = \{(1, 2), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$  و  $g(f(x)) = 5$  ک بشه  $k$  ب. دست آورید

$f(k) = 5$

$k + \sqrt{k} = 5$

$\sqrt{k} = 5 - k \Rightarrow k = 25 - 10k + k^2 \Rightarrow k^2 - 11k + 25 = 0$   
 (120)  $\sqrt{k} = 5 - k$   $\Rightarrow k = 9$   $\sqrt{k} = 4$  (120)

۲.  $y = \frac{g(x)}{f(x) + 2}$  ب. دست آورید

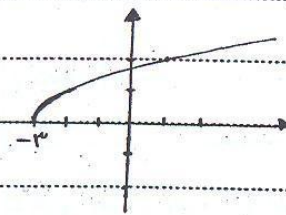


$D_f = \mathbb{R}$

$f(x) + 2 \neq 0$

$f(x) \neq -2 \Rightarrow x < -1$  د. دست آورید

$D_g = [-1, 1)$  (120)



$D_g \Rightarrow x \geq -1$

$D_{g_{(x)}} \Rightarrow x \geq -1$  د. دست آورید (120)