۱) الف) زاویه‌ای که رأس آن روی دایره، یک ضلع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر آن وتری از دایره باشد.

ب) نقطه‌ای که تبدیل یافته‌ی آن بر خود آن نقطه منطبق است.

ج) در دو دایره‌ی متقاطع، وتری که دو سر آن دو نقطه‌ی تقاطع باشد را گوییم.

د) تبدیلی که طول پاره خط‌ها را حفظ می‌کند.

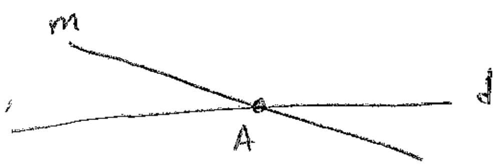
۲) الف) بله. نقطه‌ی ثابت تمام دوران‌ها، مرکز دوران است.

ب) در دو حالت. ۱) آن خط، خود محور بازتاب باشد.
۲) آن خط، عمود بر محور بازتاب باشد.

ج) خیر. تصویر A تحت بردار $\vec{v}$ نقطه‌ی A خواهد بود.

د) خیر. اگر زاویه‌ی دوران ۱۸۰° باشد، شیب خط حفظ می‌شود.

۳) اثبات صفحه‌ی ۳۶ و ابتدای صفحه ۳۷ کتاب درسی.



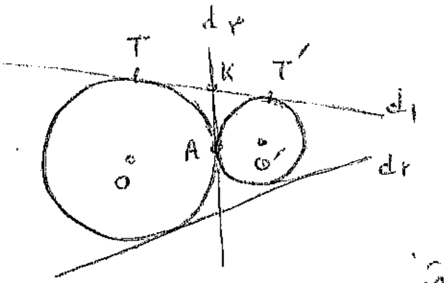
۴) A نقطه‌ای روی محور بازتاب است پس از نقاط ثابت این تبدیل است یعنی $T(A)=A$
پس خطی که تصویر خط m است، حتماً از A خواهد گذشت.

۵) الف) صفحه ۱۹ کتاب درسی
ب) صفحه ۱۸ کتاب درسی و ابتدای صفحه ۱۹

1/

۶) الف) این دو دایره مماس خارج اند.

۳ مماس مشترک دارند. ۲ تا خارجی و ۱ داخلی.



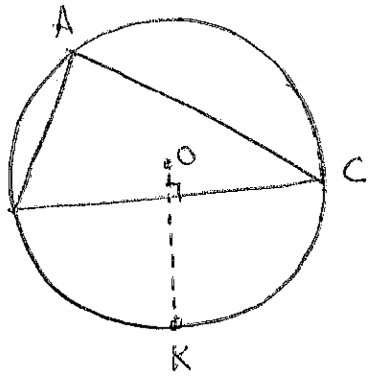
ب) از نقطه ی K دو مماس بر دایره ی به مرکز O رسم شده پس طبق قضیه:

① $KT = KA$

از نقطه ی K دو مماس بر دایره ی به مرکز O' رسم شده پس ② $KT' = KA$

①,② $\rightarrow KT = KT' \rightarrow$ K وسط TT' است.

۷) اثبات صفحه ی ۲۷ کتاب درسی



۸) مثلث ABC و دایره ی محیطی آن را رسم می کنیم.

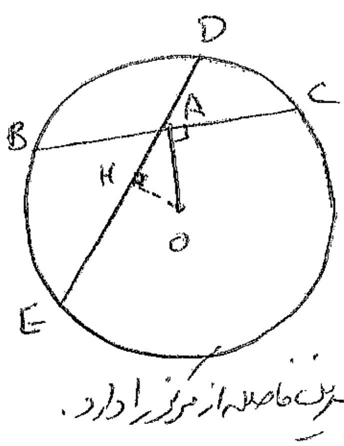
عمود منصف ضلع BC، دایره را در نقطه ی K قطع می کند. ثابت می کنیم نیم ساز زاویه ی A از نقطه ی K می گذرد.

طبق قضیه می دانیم اگر از مرکز یک دایره بر وتری از آن دایره عمود کنیم، کمان نظیر آن وتر نصف می شود. $OK \perp BC \rightarrow \overset{\frown}{BK} = \overset{\frown}{KC}$

اگر A به K وصل کنیم خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} \text{محاطی } B\hat{A}K = \dfrac{\overset{\frown}{BK}}{2} \\ \text{محاطی } K\hat{A}C = \dfrac{\overset{\frown}{KC}}{2} \\ \overset{\frown}{BK} = \overset{\frown}{CK} \end{array}\right\} \rightarrow B\hat{A}K = K\hat{A}C$$

پس AK نیم ساز A است.



۹) الف) از O به A وصل می کنیم. در نقطه ی A عمودی بر این پاره خط رسم می کنیم، وتر تشکیل شده، کوتاه ترین وتر گذرنده از A در این دایره است. (وتر BC در شکل)

زیرا هر وتر دیگری مانند DE گذرنده از A در نظر بگیریم و از O عمود OH را بر آن وارد کنیم، در مثلث قائم الزاویه OAH وتر OA از ضلع OH بزرگتر است. پس BC بیشترین فاصله از مرکز را دارد.

طبق قضیه، وتری که از مرکز دورتر باشد، کوتاه تر است.

ب) فیثاغورس $O\hat{A}C$: $OC^2 = OA^2 + AC^2 \to R^2 = \frac{R^2}{4} + AC^2 \to AC^2 = \frac{3R^2}{4}$

$$\to AC = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

می‌دانیم شعاع دایره اگر بر وتر عمود باشد، آن را نصف می‌کند پس $BC = 2AC = \sqrt{3}R$.

۱۰) الف) می‌دانیم انتقال شیب خط را حفظ می‌کند. پس دو خط موازی یکدیگرند.

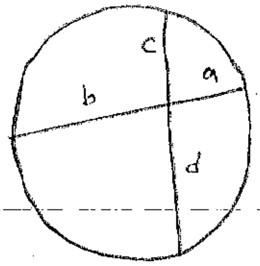
$$d: 3x - y = 1 \to y = 3x - 1$$
$$d': 3x + ay = 2 \to y = \frac{-3x}{a} + \frac{2}{a}$$
$$\to 3 = -\frac{3}{a} \to \boxed{a = -1}$$

ب) با توجه به موازی بودن دو خط، هر برداری که ابتدای آن روی d و انتهای آن روی d' باشد می‌تواند بردار انتقال باشد.

$$d: y = 3x - 1 \to A\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix} \in d$$
$$d': y = 3x - 2 \to B\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix} \in d'$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (0, -1)$$

۱۱)



فرض: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

حکم: $a + b = c + d$

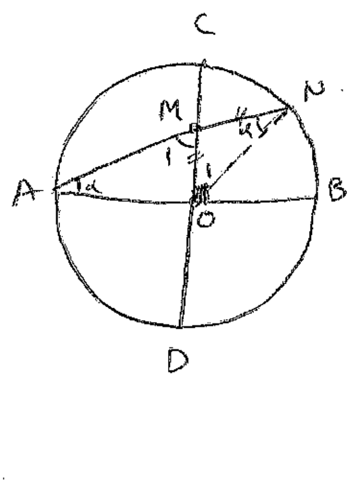
می‌دانیم حاصل‌ضرب قطعات دو وتر در دایره که یکدیگر را قطع کرده‌اند برابرند: $a \times b = c \times d \quad (*)$

اما طبق فرض $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ یعنی $ad = cb \quad (**)$

$$*, ** \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{b}{d} = \frac{d}{b} \to d^2 = b^2 \xrightarrow{\text{مقادیر مثبت}} \boxed{d = b}$$
$$\to ab = cb \to \boxed{a = c}$$

$$a = c, \ b = d \to a + b = c + d .$$

۱۲)



فرض: $CD \perp AB, \ OM = MN$

حکم: $AM = 2MN$

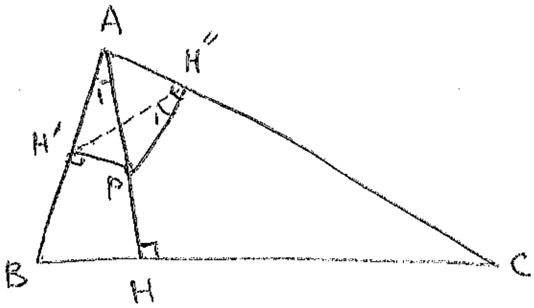
شعاع ON را رسم می‌کنیم. $A\hat{O}N: OA = ON = R \to \hat{N} = \hat{A} = \hat{\alpha}$

$$O\hat{M}N: \begin{cases} MO = ON \to \hat{O}_1 = \hat{N}_1 = \hat{\alpha} \\ \underset{\text{خارجی}}{\hat{M}_1} = \hat{O}_1 + \hat{N}_1 = 2\hat{\alpha} \end{cases}$$

$$O\hat{M}A: \hat{O} = 90^\circ \to \hat{M}_1 + \hat{A} = 90^\circ \to 2\hat{\alpha} + \hat{\alpha} = 90^\circ$$

$\to \hat{\alpha} = 30^\circ$ در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبروی زاویه ۳۰ نصف وتر است

$\to AM = 2OM$



۱۳، فرض: $AH \perp BC$, $PH' \perp AB$, $PH'' \perp AC$

حکم: $BH'H''C$ محاطی است.

$\hat{H''} = \hat{H'} = 90^\circ \rightarrow$ $AH''PH'$ محاطی است

$\rightarrow \hat{H''_1} = \hat{A}_1$ زیرا که محاطی رو به روی یک کمان

از طرفی در مثلث $\hat{ABH}$ داریم: $\hat{A}_1 = 90 - \hat{B}$ پس $\hat{H''_1} = 90 - \hat{B}$

$BH'H''C : \hat{B} + \hat{H''} = \hat{B} + \hat{H''_1} + 90^\circ = \hat{B} + (90 - \hat{B}) + 90^\circ = 180^\circ$

پس طبق قضیه، چهارضلعی $BH'H''C$ یک چهارضلعی محاطی است.