



درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir



نکاتی در مورد حل معادلات درجه سوم

کاری از: استاد محمد درخشان فر

دبیر ریاضی دبیرستانهای شهرستان آبدانان استان ایلام

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

معادله‌ی درجی سوم

۱- اگر معادله درجی سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ مجموع ضرایب صفر باشد، معادله را بر

$(x-1)$ تقسیم می‌کنیم، سپس تقویم علیه و خارج قیمت را مساوی صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌ها را در صورت وجه

مشخص می‌کنیم.

مثال: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$: چون مجموع ضرایب صفوات بر $x-1$ تقسیم می‌کنیم

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \div (x-1) \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \begin{cases} x=1 \\ x=2, 3 \end{cases}$$

۲- اگر در معادله درجی سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ، $a+c = b+d$ باشد، معادله را بر

$(x+1)$ تقسیم می‌کنیم، سپس تقویم علیه و خارج قیمت را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

مثال: معادله $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$ را حل کنید. چون $a+c = b+d$

بر $(x+1)$ تقسیم می‌کنیم $x+1 = 0 \rightarrow x = -1$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = 2, 5$$

۳- به روش دسته بندی و فاکتورگیری بعضی از معادلات درجی سوم قابل حل می‌باشند.

مثال: معادله $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ را حل کنید.

$$x^2(x-3) - 4(x-3) = 0 \Rightarrow (x-3)(x^2-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-2, 2 \end{cases}$$

۴- اگر $x=2$ یکی از ریشه‌های معادله درجی سوم باشد، آن گاه معادله بر $(x-2)$ بخش پذیر است.

مثال: اگر $x=2$ یکی از ریشه‌های معادله $x^3 + mx^2 - 2x + 4 = 0$ باشد، معادله را حل کنید.

$$x=2 \rightarrow 8 + 4m - 4 + 4 = 0 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\begin{cases} x-2=0 \rightarrow x=2 \\ x^2-2=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{بر } x-2 \text{ تقسیم می‌کنیم}$$

۵- اگر ریشه های معادله $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ عضو Z باشند. عدد ثابت معادله (یعنی d) بر هر یک از ریشه ها بخش پذیر است.

مثال: اگر ریشه های معادله $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$ عضو Z باشند. معادله را حل کنید.

عدد ثابت معادله ۲۰ می باشد و عدد ۲۰ بر اعداد $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20\}$ بخش پذیر است.

۱- می توانند ریشه های معادله باشند چنانچه مجموع ضرایب صفرات و نه $a+c=b+d$

اگر $x=2$ را در معادله جایگذاری کنیم چنان صفر می شود پس بر $x-2$ تقسیم کرده خارج قسمت را مساوی صفر قرار می دهیم

$$\begin{cases} x-2=0 \rightarrow x=2 \\ x^2-3x-10=0 \Rightarrow x=-2, x=5 \end{cases}$$

۶- اگر ریشه های معادله درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ به صورت کمرهائی $\frac{p}{q}$ به فرم $(\frac{p}{q})$ باشند $(p, q \in Z, q \neq 0)$ آنگاه p عدد d و q عدد a می شود. به عبارت دیگر d بر p بخش پذیر و a بر q بخش پذیر باشد.

مثال: اگر ریشه های معادله $17x^3 - 70x^2 + 52x - 15 = 0$ به صورت کمرهائی $\frac{p}{q}$ مانند $(\frac{p}{q})$ باشند. معادله را حل کنید. $(p, q \in Z, q \neq 0)$

$$x_1 = \frac{p}{q} \Rightarrow \begin{cases} p \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\} \\ q \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 17\} \end{cases}$$

با یک ردهی مشخص می شود که یکی از ریشه ها $\frac{1}{4}$ است بنابراین به تقسیم عبارت بر $(x - \frac{1}{4})$

و مساوی قرار دوز خارج قسمت صفر ریشه های بعدی هم به دست می آیند

$$\begin{cases} x - \frac{1}{4} = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4} \\ 17x^2 - 52x + 30 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4}, x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

بحث در تعداد و علامت ریشه‌های معادله درجه سوم

برای بحث در معادله درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ باید آنرا را به معادله قابل

بحث $x^3 + px + q = 0$ تبدیل نمود.

۱- برای تبدیل معادله $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ به معادله قابل بحث $x^3 + px + q = 0$

باید x را به $(x - \frac{b}{3a})$ تبدیل کرد.

۲- برای تبدیل معادله $ax^3 + bx^2 + d = 0$ به معادله قابل بحث $x^3 + px + q = 0$

کافی است x را به $\frac{1}{x}$ تبدیل کنیم.

مثال: معادلات زیر را به معادله قابل بحث تبدیل کنید.

$$1) \quad x^3 + 7x^2 + 9x + 1 = 0 \quad x \rightarrow x - \frac{b}{3a} = x - \frac{7}{3} = x - 2$$

$$\Rightarrow (x-2)^3 + 7(x-2)^2 + 9(x-2) + 1 = 0 \Rightarrow x^3 - 3x - 1 = 0 \quad \begin{cases} p = -3 \\ q = -1 \end{cases}$$

$$2) \quad 2x^3 - 7x^2 + 1 = 0 \quad x \rightarrow \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{x}\right)^3 - 7\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \frac{2}{x^3} - \frac{7}{x^2} + 1 = 0 \xrightarrow{\times x^3} x^3 - 7x + 2 = 0 \quad \begin{cases} p = -7 \\ q = 2 \end{cases}$$

نکته: اگر y_1, y_2 عضوهای اکستریم $y = x^3 + px + q$ باشند آنگاه:

$$\Delta = 27 y_1 y_2 \quad \text{و علامت } 4p^3 + 27q^2 \quad y_1 y_2 = \frac{4p^3 + 27q^2}{27}$$

بحث در تعداد و علامت ریشه‌های معادله $x^3 + px + q = 0$

معادله یک ریشه حقیقی مخالف علامت q دارد $\Rightarrow \Delta > 0 \wedge p > 0$ ۱)

معادله سه ریشه حقیقی دارد که یکی مخالف علامت q و دو تا موافق $\Rightarrow \Delta < 0$ ۲)

علامت q دارد.

معادله یک ریشه ساده مخالف علامت q و یک ریشه مضاعف موافق علامت $\Delta = 0$ ۳)

$$\begin{aligned} \text{ریشه مضاعف} &= \sqrt[3]{\frac{q}{p}} \\ \text{ریشه ساده} &= -2\sqrt[3]{\frac{q}{p}} \end{aligned}$$

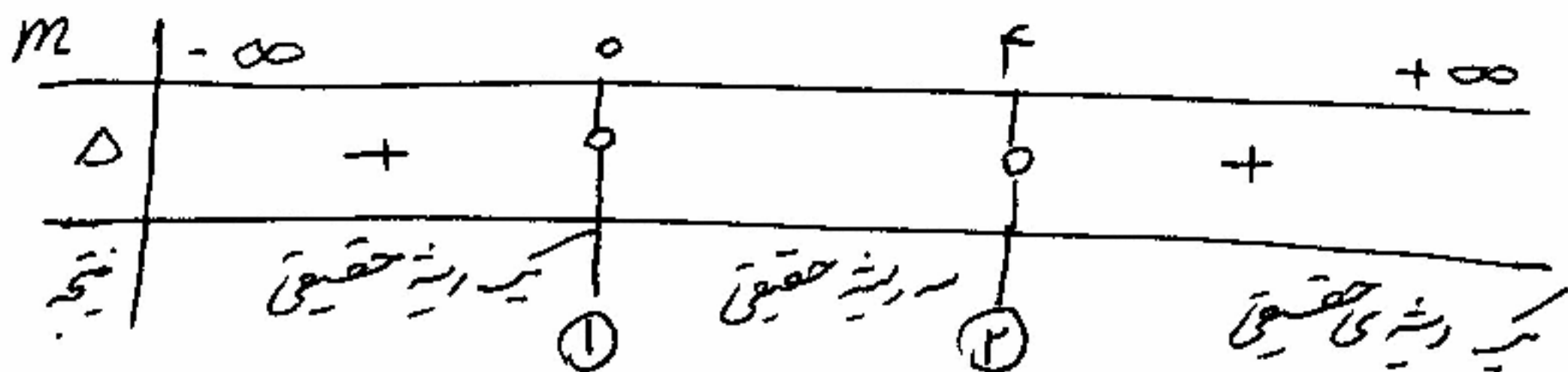
۱- تذکره هم، در حالتی که $\Delta = 0$ داریم

مثال: در تعداد ریشه‌های معادله $x^3 - 7x^2 + 9x + (m-4) = 0$ به ازای مقادیر مختلف m

بحث کنید $x \rightarrow x - \frac{b}{3a} \Rightarrow x \rightarrow x - \frac{-7}{3} = x + 2$

$$\Rightarrow (x+2)^3 - 7(x+2)^2 + 9(x+2) + m-4 = 0 \Rightarrow x^3 - 3x + m-4 = 0 \quad \begin{cases} p = -3 \\ q = m-4 \end{cases}$$

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 4(-3)^3 + 27(m-4)^2 = 0 \Rightarrow m^2 - 8m = 0 \Rightarrow m = 0, m = 8$$



معادله یک ریشه حقیقی ساده و یک ریشه حقیقی مضاعف دارد $\Delta = 0$ روی خط‌های ① و ②

مثال: به ازای چه مقدار m معادله $x^3 - 3x + (m+1) = 0$ سه ریشه حقیقی متمایز دارد.

$$\Delta < 0 \Rightarrow 4p^3 + 27q^2 < 0 \Rightarrow 4(-3)^3 + 27(m+1)^2 < 0 \quad (m \text{ حبابی باشد})$$

$$(m+1)^2 < 4 \Rightarrow -2 < m+1 < 2 \Rightarrow -3 < m < 1 \Rightarrow m = 0$$

نکته: اگر در معادله $x - \frac{b}{3a}$ از تبدیل $x - \frac{b}{3a}$ استفاده کنیم. در حالت کلی نمی‌توانیم در علامت ریشه‌ها بحث کنیم.